Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

15 de MAYO de 2014

TEMA: **43 B**

1	2		3		4		5	Nota Final
2 p.	2 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1.5 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 90 MINUTOS

Ejercicio n° 1

Resuelva en Complejos: $z^2 - 2z - 3 = (4z - 6)\,j \quad \wedge \quad |z - 1 - 2j| \leq 2$

Ejercicio n° 2:

Sea $f(x) = 5$ si $x \in (-1;1) \wedge f(x) = 3$ si $1 < |x| < 2 \wedge f(x) = f(x+4)$

a) Desarrolle en Serie Trigonométrica de Fourier.

b) En base a la Serie hallada, calcule: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Ejercicio n° 3: Dada $G(s) = \dfrac{s^2 + Ks + M}{(s^2 - s)(s^2 + 4s + 5)}$

a) Halle los valores de K, M $\in$ R tales que el sistema sea estable y s=-4 sea un cero.

b) Con dichos valores, halle la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = 15\,e^{-4t}$

Ejercicio n° 4:

dique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) $\mathscr{L}\left[\operatorname{sen}(3t - \frac{\pi}{6})\right] = \frac{1}{2} \bullet \dfrac{-s + 3\sqrt{3}}{(s^2 + 9)}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, e^{-\sqrt{3}\,t} = \frac{\pi}{2}$ (justifique utilizando Transformada de Laplace)

Ejercicio n° 5:

Resuelva aplicando Transformada Z:

$x(n+2) - 4\,x(n+1) + 4\,x(n) = 4^{n+1}$ con $x(0) = 1 \quad \wedge \quad x(1) = 10$

Firma del alumno: ....

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 43 B

Ejercicio 1:

Las 2 raíces de la cuadrática son: $2 + j$ y $3j$

2da parte: círculo centro (1;2) y radio 2 $\Rightarrow$ la intersección son ambas

Ejercicio 2:

a) $Sf(x) = 4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cos(n\frac{\pi}{2}x)$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Ejercicio 3:

a) $K = 3 \wedge M = -4$

b) $G(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{(s^2 - s)(s^2 + 4s + 5)} = \frac{(s-1)(s+4)}{s(s-1)(s^2+4s+5)} = \frac{s+4}{s\,(s^2+4s+5)}$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s\,(s^2+4s+5)} \bullet \frac{15}{s+4} = \frac{15}{s\,(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s} - 3\frac{s}{s^2+4s+5} - 12 \bullet \frac{1}{s^2+4s+5}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1} + (-12+6) \bullet \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$Y(t) = 3 - 3\cos(t)\,e^{-2t} - 6\,\mathrm{sen}(t)\,e^{-2t}$$

Ejercicio 4:

a) VERDADERO

b) FALSO. $F(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 5:

$$X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 20z}{(z-2)^2(z-4)} \Rightarrow x(n) = 3 \bullet n \bullet 2^n + 4^n$$

inicio: 16:30
fin :

Tema 43B
15-5-14

Mat. Superior 1° parcial

$\boxed{\text{EJ 1}}$ Resuelva en complejos: $z^2-2z-3=(4z-6)j \wedge |z-1-2j| \leq 2$

- $z^2-2z-3=4jz-6j \longrightarrow z^2-(2+4j)z+(-3+6j)=0$ $a=1$, $b=-(2+4j)$, $c=-3+6j$

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2+4j+\sqrt{(-2-4j)^2-4(-3+6j)}}{2}=$$

$$=\frac{2+4j+\sqrt{-12+16j+12-24j}}{2}=\frac{2+4j+\sqrt{-8j}}{2}=\frac{2+4j+w_{1,2}}{2}$$

- $w^2=-8j \xrightarrow[|w|=8]{x=0} w_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{8+0}{2}} \mp \sqrt{\frac{8-0}{2}}\,j$ $\begin{cases} w_1=2-2j \\ w_2=-2+2j \end{cases}$

$$z_1=\frac{2+4j+w_1}{2}=\frac{2+\cancel{4j}+2-2j}{2}=\frac{4+2j}{2} \Rightarrow \boxed{z_1=2+j}$$

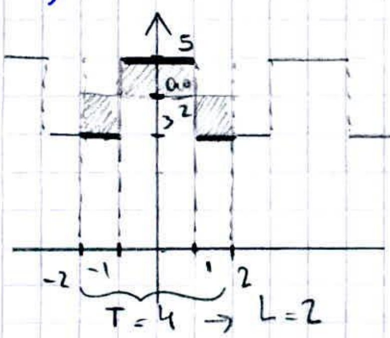
$$z_2=\frac{2+4j+w_2}{2}=\frac{\cancel{2}+4j-\cancel{2}+2j}{2}=\frac{6j}{2} \Rightarrow \boxed{z_2=3j}$$

Además tiene que cumplir que $|z-1-2j|\leq 2$

$$\left.\begin{array}{l} |z_1-1-2j|=|2+j-1-2j|=|1-j|=\sqrt{2}<2 \\ |z_2-1-2j|=|3j-1-2j|=|-1+j|=\sqrt{2}<2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} z_1=2+j \\ z_2=3j \end{array}}$$

$\boxed{\text{EJ 2}}$ Sea $f(x)=5$ si $x\in(-1;1) \wedge f(x)=3$ si $1<|x|<2 \wedge f(x)=f(x+4)$

a) Desarrolle en Serie trigonométrica de Fourier.



Es una función par $\rightarrow$ sólo cosenos $\rightarrow b_n=0$

$\boxed{\frac{a_0}{2}=4}$ $T=4 \rightarrow L=2 \rightarrow \omega=\frac{\pi}{2}$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\omega t)\,dt=$$

$$=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 5\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt+\int_1^2 3\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt\right]=$$

$$=5\cdot\left.\frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}t)}{(n\frac{\pi}{2})}\right|_0^1+3\left.\frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}t)}{n\frac{\pi}{2}}\right|_1^2=\frac{10}{n\pi}\cdot\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{6}{n\pi}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^k}$$ es: 0 si n es par; si n es impar $\rightarrow n\equiv 1(4) \rightarrow$ es 1; $n\equiv 3(4)\rightarrow$ es -1

$\boxed{n=2k+1}$

$$\boxed{S(t)=4+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos\left((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}t\right)}$$

NOTA

b) En base a la serie hallada, calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

$S(0) = 5$ (x el gráfico)

$S(t) = 4 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(m \frac{\pi}{2} t\right) \rightarrow S(0) = 4 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \overbrace{\cos\left(m \frac{\pi}{2} \cdot 0\right)}^{1}$

$\rightarrow 5 = 4 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$ ✓

EJ 3 Dado: $G(s) = \frac{s^2 + Ks + M}{(s^2 - s)(s^2 + 4s + 5)}$

a) Halle los valores de K, M ∈ ℝ tales que el sistema sea estable y s = −4 sea un cero

$G(s) = \frac{s^2 + Ks + M}{s(s-1)[(s+2)^2+1]}$ → Para que sea estable, ∄ polo con $Re(p_i) > 0$
∴ 1 tiene que ser raíz del numerador también
→ ceros: −4; 1; ∞
polos: 0; −2+j; −2−j (es marginalmente estable)

ceros: −4 y 1 → $(s+4)(s-1) = s^2 + \underset{\uparrow K}{3s} \underset{\uparrow M}{-4}$ $\boxed{K = 3, M = -4}$ ✓

b) con dichos valores, halle la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = 15\, e^{-4t}$

↳ $X(s) = \frac{15}{s+4} \longrightarrow Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{\cancel{(s+4)}\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}(s^2+4s+5)} \cdot \frac{15}{\cancel{(s+4)}}$

$Y(s) = \frac{15}{s(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5} \rightarrow A(s^2+4s+5) + Bs^2 + Cs = 1 \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + C = 0 \\ 5A = 15 \end{cases}$

$A = 3$; $B = -3$; $C = -12$

$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s+12}{(s+2)^2+1} = \frac{3}{s} - \frac{\overbrace{3s+6}^{3(s+2)}}{(s+2)^2+1} - \frac{6}{(s+2)^2+1}$

$\boxed{y(t) = 3 - e^{-2t}\left(3\cos(t) + 6\,\text{sen}(t)\right)}$ ✓

EJ 4 Indique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) $\mathcal{L}\left[\text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{-s + 3\sqrt{3}}{s^2+9}$ $\qquad$ $\text{sen}(x-y) = \text{sen}\,x \cos y - \text{sen}\,y \cos x$

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \rightarrow f(t) = \text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}(3t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(3t) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(3t) - \frac{1}{2}\cos(3t) \rightarrow F(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+9} =$

$= \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3} - s}{s^2+9}$ ✓ $\qquad \boxed{V}$

15-5-14

b) $\int_0^\infty \frac{sen(t)}{t} e^{-\sqrt{3}\,t} = \frac{\pi}{2}$ (Justifique utilizando transformada de Laplace)

$\boxed{F}$

$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \xrightarrow{\text{tomo: } s=\sqrt{3}}$ hallo $F(s)$ y evalúo en $\sqrt{3}$.

$f(t) = \frac{sen(t)}{t} \xrightarrow[G(s)=\frac{1}{s^2+1}]{g(t)=sen(t)} F(s) = \int_s^\infty G(u)\, du = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\, du =$

$= arctg(u)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - arctg(s)$

$F(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{EJ 5}$ Resuelva aplicando transformada Z:

$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 4^{n+1} = 4 \cdot 4^n$ con $x(0) = 1 \wedge x(1) = 10$

$z^2\left[X(z) - \overset{1}{x(0)} - \frac{\overset{10}{x(1)}}{z}\right] - 4z\left[X(z) - \overset{1}{x(0)}\right] + 4X(z) = \frac{4z}{z-4}$

$z^2 X(z) - z^2 - 10z - 4z X(z) + 4z + 4X(z) = \frac{4z}{z-4}$

$X(z)(z^2 - 4z + 4) = \frac{4z}{z-4} + z^2 + 6z = \frac{4z + z^3 - 4z^2 + 6z^2 - 24z}{z-4}$

$X(z) = z\left[\frac{z^2 + 2z - 20}{(z-4)(z-2)^2}\right] = z\left[\frac{\overset{=\frac{4}{4}}{A}}{z-4} + \frac{B}{z-2} + \frac{\overset{=\frac{-12}{-2}}{C}}{(z-2)^2}\right]$

$\rightarrow A(z^2-4z+4) + B(z^2-6z+8) + C(z-4) = z^2 + 2z - 20$

$\begin{cases} A + B = 1 \\ -4A - 6B + C = 2 \\ 4A + 8B - 4C = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 6 \end{matrix}$ $\quad X(z) = \frac{z}{z-4} + \frac{6z}{(z-2)^2} \rightarrow \boxed{x(n) = 4^n + 3n2^n}$